Über die Berechnung der Nettowerte verbundener Renten mittels eines Nomogramms

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades genehmigt von der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Berlin

Von

Heinz Voigt
aus Heiligenbeil

Tag der mündlichen Prüfung: 23. November 1938
Tag der Promotion: 27. Februar 1939

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1939

Referenten: Professor Dr. P. Riebesell
Professor Dr. A. Klose

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Erscheint gleichzeitig unter dem Titel „Über die Berechnung der Nettowerte verbundener Renten mittels eines Nomogramms" im Verlag Robert Noske, Borna Bezirk Leipzig

Meinen Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548011_0047

A. Einleitung und Problemstellung.

Die Berechnung von Versicherungswerten, z. B. Beiträgen, Leistungen usw. läßt sich allgemein auf die Berechnung der Barwerte von Renten zurückführen. In dieser Arbeit wird hauptsächlich von diesen Renten und ihren Barwerten die Rede sein. Der Begriff der verbundenen Leben wird dabei auftreten. Unter dieser Bezeichnung soll ein Versicherungsobjekt verstanden werden, das sich aus mehreren Personen zusammensetzt.

Die Berechnung von Renten für verbundene Leben ist für jeden Fall mit der geforderten, durch die Rechnungsgrundlagen gegebenen Genauigkeit möglich. Die dazu benutzten Formeln sind auf diskontinuierlicher Grundlage aufgestellt. Der Versuch, die berechneten Werte, wie das bei Versicherungen von Einzelpersonen möglich ist, in Tafeln zusammenzufassen, ist für verbundene Leben fast unmöglich. Einmal ist die Rechenarbeit sehr groß und gleichzeitig geht die Übersichtlichkeit verloren infolge der vielfältigen Kombinationsmöglichkeiten aus den Altern der verschiedenen Personen und der Dauer der Versicherungen. In der Praxis ist dementsprechend versucht worden, mit Vereinfachungen oder Näherungen zu arbeiten. Dabei ist die Beschränkung auf zwei Leben in den üblichen Tarifen vorgenommen worden.

Die Methoden zweier Versicherungsgesellschaften werden als charakteristisch herausgegriffen. Beide Methoden, mit H und M abgekürzt bezeichnet, beschränken sich auf zwei Leben. Beide Methoden benutzen Sterbetafeln, die nach der Gompertz-Makehamschen Sterbeformel ausgeglichen sind, und setzen voraus, daß die Sterbeintensitäten für beide Leben derselben Tafel entnommen werden können. Die erste Methode, H, ersetzt das durch die Alter x und y bezeichnete Paar xy durch ein gleichaltriges Paar $x'x'$. Das Hilfsalter x' wird in einer Tafel aus den beiden Altern x und y gefunden. Für dieses fingierte, gleichaltrige Paar wird der Versicherungswert gerechnet.

Die zweite Methode, M, die nur für Kapitalversicherungen angewendet wird, nimmt an, daß die jährlichen Prämien $P^{(M)}_{x\,y\,\overline{n}|}$ für das Paar durch die Einzelprämien $P_{x\,\overline{n}|}$, $P_{y\,\overline{n}|}$ mit einem, nur von

der Dauer der Laufzeit der Versicherung abhängigen Ergänzungsglied $f(n)$ gegeben sind.

$$(1) \qquad P^{(M)}_{x\,y\,\overline{n|}} = P_{x\,\overline{n|}} + P_{y\,\overline{n|}} + f(n).$$

Beide Gesellschaften schreiben in ihren Tarifen dazu folgende Bedingungen vor:

1. Die Versicherung beschränkt sich grundsätzlich nur auf Kapitalauszahlungen. Renten sind nicht zugelassen.
2. Das Eintrittsalter der älteren Person darf nicht über 60 Jahre sein.
3. Die Versicherung beträgt höchstens 40 Jahre.
4. Die Versicherung darf nur bis zum rechnungsmäßig 70. Lebensjahr der älteren Person dauern.

Diese Bedingungen ergeben sich aus dem Ansatz der G.-M.-Sterbeformel

$$(2) \qquad \mu_t = A + B\,c^t, \qquad l_t = k\,s^t\,g^{c^t},$$

wie aus der späteren Entwicklung noch näher zu ersehen ist[1]). Die Reihenfolge der Sterbefälle ist im Tarif nicht vorgeschrieben, die Versicherung erfolgt auf den ersten Todes- oder Erlebensfall.

Die von Riebesell vorgeschlagene Berücksichtigung einer Dynamik der Sterbetafel[2]) läßt sich leicht durch den Grundgedanken von M, Herstellung von $P_{x\,y\,\overline{n|}}$ aus $P_{x\,\overline{n|}}$ und $P_{y\,\overline{n|}}$ auf dem rechnerisch schwerer zugänglichen Gebiet der verbundenen Renten durchführen. Doch ist M in der durch den Tarif der Gesellschaft gegebenen Form unbrauchbar, denn wie sich später ergeben wird, wächst der Fehler von $P^{(M)}_{x\,y\,\overline{n|}}$ gegen die aus den Grundlagen direkt berechnete verbundene Prämie bis zu 25 %. Das heißt: Der durch die Ungenauigkeit der Rechnung begründete Fehler wird die Änderungen überdecken, die durch die Änderung der Rechnungsgrundlagen verursacht werden.

Anhand einer vorgegebenen Sterbetafel soll im folgenden eine kombiniert numerisch nomographische Methode zur Bestimmung der verbundenen Renten für zwei Leben entwickelt werden, die diese Mängel nicht aufweist.

Die verbundene Rente wird durch leicht herzustellende Versicherungswerte für Einzelleben und ein Ergänzungsglied R dargestellt. Dieses Ergänzungsglied R ist Gegenstand der Arbeit. Im

---

[1]) Vgl. Lidstone, Some remarks on the valuation endowement assurances in groups. J.I.A. Bd. 34, 1900, S. 61. Further remarks. J.I.A. Bd. 38, 1904, S. 1.

[2]) P. Riebesell, Über eine dynamische Sterbetafel. Neumanns Zeitschrift, 1938.

Ergebnis gelingt es, R in guter Näherung als abhängig von der Alterskombination $x+y$ und der Dauer n darzustellen und zu vertafeln. Die Tafel ist nicht numerisch, sondern als Nomogramm gegeben, weil dadurch Übersichtlichkeit und leichter Gebrauch, verbunden mit völlig ausreichender Genauigkeit, auch bei Interpolation, ermöglicht wird. Das Nomogramm ist durch Zusammenfügung zweier Fluchtliniennomogramme mittels einer Zapfenlinie gewonnen.

Die Fehler und der Einfluß einer Änderung der Rechnungsgrundlagen auf R werden abgeschätzt und zur Berechnung werden leicht festzustellende obere Schranken für diesen Einfluß angegeben.

B. Die Herstellung des Ergänzungsgliedes R.

I. Vorbemerkungen.

Wie weit ist nun der Gebrauch einer nach der G.-M.-Formel ausgeglichenen Sterbetafel und die Entnahme der Sterbeintensitäten der beiden verbundenen Leben aus derselben Tafel gestattet?

Die Berechtigung zur Anwendung der G.-M.-Formel ergibt sich aus dem verwendeten Beobachtungsmaterial[3]). Der Gebrauch der G.-M.-Formel ist so allgemein, daß sie hier als gültig angesehen werden kann. Wichtig für eine so ausgeglichene Sterbetafel ist die Frage, innerhalb welcher Altersgrenzen die Ausgleichung durch dieselbe G.-M.-Formel gestattet ist, d. h., ob die Sterblichkeit innerhalb dieser Grenzen demselben einfachen Exponentialgesetz mit denselben Konstanten folgt. Die Feststellung des kleinsten Alters, das diesem Bereich noch angehört, ist dabei vor allem wichtig, denn in den höheren Altern ist wegen der Kleinheit des vorhandenen Beobachtungsmaterials eine Angleichung an eine vorgegebene Verteilung leicht zu erreichen.

Für die Berechnung der oben erwähnten Tarife sind innerhalb der Grenzen 20—70 dieselben Konstanten A, B, c angenommen worden. In guter Näherung ist diese Annahme bei Sterbetafeln erfüllt, die sich auf die Gesamtbevölkerung stützen. Bei solchen Sterbetafeln ergibt sich dann die Möglichkeit, die Sterbeintensitäten für beide Leben derselben Tafel zu entnehmen.

Damit ist noch nicht die Frage über den gegenseitigen Einfluß der Partner aufeinander berührt. Zum Beispiel wirkt der Tod des einen Partners, bei Verwandtschaftsverhältnissen etwa, auf den anderen sicher stark in dem Sinne ein, daß die Sterbeintensität des Über-

[3]) Vgl. Berger, Wien, Studien zur Versicherungsmathematik. Über die G.-M.-Sterbeformel. Assekuranzjahrbuch, Bd. 52, 1933.

lebenden sich stark und sprunghaft ändern kann. Wegen der Beschränkung auf Kapitalauszahlung ist dieser Einfluß ohne Belang.

Die Frage nach der Erlaubnis, die μ_x und μ_y derselben Tafel zu entnehmen, müßte Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein.

Als Voraussetzung für alles Folgende wird hier angenommen

1. Die zugrunde gelegte Sterbetafel ist innerhalb des betrachteten Bereiches nach derselben G.-M.-Sterbeformel ausgeglichen.
2. Die beiden Sterbeintensitäten können derselben Tafel entnommen werden.
3. Die vorher in der Einleitung unter 1 bis 4 festgestellten Bedingungen sollen gelten.

Im Folgenden soll weiterhin $x \geqq y$ sein.

II. Entwicklung der allgemeinen Formeln.

Ausgangspunkt sind die kontinuierlichen Renten ${}_{|n}\bar{a}_x$, ${}_{|n}\bar{a}_y$, ${}_{|n}\bar{a}_{xy}$. Sie sind gefunden durch folgende Werte:

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} {}_{|n}\bar{a}_x = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^n e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu_{x+\xi}\, d\xi}\, dt \\ \qquad = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+\xi}+\delta)\, d\xi}\, dt, \end{array}\right.$$

entsprechend für y:

$${}_{|n}\bar{a}_y = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{y+\xi}+\delta)\, d\xi}\, dt$$

und für x, y:

$${}_{|n}\bar{a}_{xy} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+\xi}+\mu_{y+\xi}+\delta)\, d\xi}\, dt.$$

Nach der G.M.-Formel ist $\mu_{x+t} = A + B\, c^{x+t}$. Damit wird aus dem Integral des Exponenten

$$\int_0^t (\mu_{x+\xi} + \delta)\, d\xi = \int_0^t (A + B\, c^{x+\xi} + \delta)\, d\xi$$

$$= (A + \delta)\, t + \frac{B}{\ln c} (c^t - 1)\, c^x .$$

Wird zur Abkürzung $A + \delta = a$, $\dfrac{B}{\ln c} = L$ eingeführt, so werden die Barwerte der Renten

(4) $$|_n\bar{a}_x = \int_0^n e^{-a\,t - L\,c^x (c^t - 1)}\, dt$$

und

$$|_n\bar{a}_y = \int_0^n e^{-a\,t - L\,c^y (c^t - 1)}\, dt .$$

Bei der verbundenen Rente wird das Integral des Exponenten

$$\int_0^t (\mu_{x+\xi} + \mu_{y+\xi} + \delta)\, d\xi$$

$$= \int_0^t \left(2A + \delta + B\, c^{\xi}\, (c^x + c^y)\right) d\xi$$

$$= (2A + \delta)\, t + \frac{B}{\ln c} (c^x + c^y)\, (c^t - 1) .$$

Wird $(2A + \delta) = C$ gesetzt, so wird die Rente des Paares

(5) $$|_n\bar{a}_{xy} = \int_0^n e^{-C\,t - L\,(c^x + c^y)(c^t - 1)}\, dt .$$

Diese drei Integrale der Renten sind nicht in geschlossener Form darzustellen [4]).

Das Integral

(6) $$\begin{cases} R = R(x, y, n) = |_n\bar{a}_x + |_n\bar{a}_y - |_n\bar{a}_{xy}, \\ \quad = \displaystyle\int_0^n \Big(e^{-a\,t - L\,c^x (c^t - 1)} + e^{-a\,t - L\,c^y (c^t - 1)} \\ \qquad\qquad - e^{-C\,t - L\,(c^x + c^y)(c^t - 1)}\Big)\, dt , \end{cases}$$

das im folgenden von Interesse ist, ist grundsätzlich von allen drei Veränderlichen x, y, n abhängig.

---

[4]) Vgl. Berger, a. a. O. 3), S. 5 und S. 7.

III. Berechnung von R.

Eine wichtige Voraussetzung für die klare und übersichtliche Darstellbarkeit einer Gleichung durch ein Nomogramm ist, die Zahl der vorhandenen Veränderlichen so klein wie möglich zu halten. Auf die hier vorkommenden Renten bezogen heißt das, daß die Zahl der Veränderlichen x, y, n von drei auf eine oder zwei reduziert werden müßte. Wie sich später ergeben wird, ist die Darstellung von R als Funktion allein von n mit Fehlern verbunden, die bis zu etwa 25 % anwachsen können. Die Nichtberücksichtigung der Alter hat also sehr große Fehler im Gefolge. Sicher ist die Darstellung einer Funktion von drei Veränderlichen durch eine andere, die nur zwei Variable hat, eine Näherung. Eine derartige Approximation soll hier als gut bezeichnet werden, wenn ihre Abweichung gegenüber der ursprünglichen Funktion kleiner als 2,5 % ist.

Die Rente ${}_{|n}\bar{a}_{x\,y}$ wird zuerst betrachtet. Wie groß ist in ihr der Fehler, wenn zu ihrer Darstellung nur zwei Variable, nämlich die Alterskombination $x+y$ und die Dauer n, verwendet werden?

In den folgenden Übersichten 1 bis 7 sind die numerischen Werte aus den Formeln (4) und (5) hergeleitet. In diesen Übersichten sind die Spalten durch die zugehörigen Alter $(x,\ y)$, die waagerechten Reihen durch die zugehörige Dauer t bezeichnet. (Sterbetafel und Zinsfuß siehe Zahlentafel.)

Numerische Unterlagen zur Berechnung von ${}_{|n}\bar{a}_{x\,y}$.

Übersicht 1. Werte der negativen Exponenten der Integranden von (5).

$(x,\ y)$	(20,20)	(20,30)	(30,30)	(40,40)	(45,45)	(50,50)	(30,50)
t							
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0436	0,0472	0,0508	0,0702	0,0900	0,1228	0,0868
2	0,0877	0,0952	0,1027	0,1435	0,1854	0,2543	0,1785
3	0,1323	0,1441	0,1560	0,2204	0,2865	0,3953	0,2756
4	0,1774	0,1941	0,2108	0,3013	0,3943	0,5474	0,3791
5	0,2230	0,2451	0,2672	0,3866	0,5094	0,7114	0,4893
6	0,2694	0,2974	0,3253	0,4767	0,6322	0,8881	0,6067
7	0,3165	0,3509	0,3853	0,5720	0,7636	1,0791	0,7322
8	0,3643	0,4059	0,4475	0,6736	0,9047	1,2859	0,8667
9	0,4130	0,4626	0,5120	0,7805	1,0564	1,5102	1,0111
10	0,4628	0,5211	0,5794	0,8958	1,2205	1,7551	1,1673
15	0,7300	0,8480	0,9660	1,6062	2,2644	3,3469	2,1562
20	1,0422	1,2587	1,4752	2,6576	3,8561	5,8415	3,6583
25	1,4290	1,8075	2,1861	4,2390	6,3506		6,0047
30	1,9380	2,5837	3,2296	6,7324	10,3324		9,7424
35	2,6478	3,7357	4,8220				
40	3,6912	5,5047	7,3164				

Übersicht 2. Funktionswerte der Integranden von (5).

t	(x, y) (20,20)	(20,30)	(30,30)	(40,40)	(45,45)	(50,50)	(30,50)
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0,95733	0,95389	0,95049	0,93220	0,91390	0,88447	0,91689
2	0,91603	0,90916	0,90240	0,86632	0,83080	0,77549	0,83652
3	0,87608	0,86580	0,85556	0,80220	0,75091	0,67350	0,75909
4	0,83744	0,82358	0'80994	0,73993	0,67414	0,57846	0,68449
5	0,80011	0,78263	0,76552	0,67936	0,60086	0,49096	0,61307
6	0,76384	0,74275	0,72231	0,62083	0,53144	0,41144	0,54516
7	0,72870	0,70405	0,68025	0,56440	0,46598	0,33991	0,48086
8	0,69468	0,66638	0,63922	0,50987	0,40467	0,27640	0,42034
9	0,66166	0,62965	0,59930	0,45818	0,34772	0,22086	0,36381
10	0,62952	0,59387	0,56023	0,40828	0,29507	0,17289	0,31122
15	0,48191	0,42827	0,38060	0,20065	0,10390	0,03519	0,11576
20	0,35268	0,28402	0,22873	0,07012	0,02115	0,00291	0,02578
25	0,23955	0,16406	0,11235	0,01442	0,00175		0,00247
30	0,14399	0,07549	0,03957	0,00119	0,00003		0,00006
35	0,07081	0,02386	0,00805				
40	0,03494	0,00406	0,00067				

Übersicht 3. Werte der ${}_{|n}\bar{a}_{x\,y}$.

n	(x, y) (20,20)	(20,30)	(30,30)	(40,40)	(45,45)	(50,50)	(30,50)
10	8,0497	7,8739	7,7041	6,8758	6,1649	5,2317	6,2730
20	12,8994	12,1922	11,5564	9,0108	7,3846	5,7594	7,6065
30	15,3242	13,8851	12,7526	9,2260	7,4315		7,6660
40	16,0945	14,1768	12,8734				

Die Integration erfolgte numerisch nach der Simpsonschen Regel. Um den Einfluß des Fehlers dieser numerischen Auswertung so klein zu halten, daß er gegenüber der Genauigkeit verschwindet, die die benutzten Rechnungsgrundlagen hergeben, wurden mehr Stellen gebraucht, als aus dem Ansatz der Sterbeintensitäten zu vertreten ist. Dadurch ist der Fehler unter die letzte gegebene Stelle gesunken [5]).

Die Abbildung 1 zeigt, daß die Darstellung von ${}_{|n}\bar{a}_{x\,y}$ als Funktion nur von den zwei Variablen $x+y$ und n nicht möglich ist, denn etwa für den speziellen Fall $x+y=80$ sind zwischen den Kurven $x=y=40$ und $x=50$, $y=30$ Abweichungen, die zwischen den Grenzen 10% und 16% liegen.

Die ${}_{|n}\bar{a}_{xy}$ wurden bis $t=10$ in Intervallen von 1, von $t=10$ ab in Intervallen von 5 berechnet.

[5]) G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Sammlung Göschen, Berlin, 1937, S. 96.

Betrachtet man $R(x, y, n)$, so sieht man, daß es mit einem geringen Fehler erlaubt ist, R als abhängig nur von den beiden Variablen $x + y$ und n anzusehen.

Numerische Unterlagen für die Berechnung von ${}_{|n}\bar{a}_x$.

Übersicht 4. Werte der negativen Exponenten von (4).

	(x)	(20)	(30)	(40)	(45)	(50)
t						
0		0	0	0	0	0
1		0,0390	0,0426	0,0523	0,0622	0,0786
2		0,0783	0,0858	0,1062	0,1271	0,1616
3		0,1178	0,1297	0,1619	0,1949	0,2493
4		0,1567	0,1743	0,2195	0,2660	0,3426
5		0,1976	0,2197	0,2794	0,3408	0,4418
6		0,2380	0,2660	0,3417	0,4194	0,4574
7		0,2788	0,3132	0,4065	0,5024	0,6601
8		0,3199	0,3615	0,4746	0,5901	0,7807
9		0,3615	0,4110	0,5452	0,6832	0,9101
10		0,4036	0,4619	0,6201	0,7825	1,0498
15		0,6233	0,7413	1,0614	1,3905	1,9317
20		0,6855	1,0820	1,6732	2,2725	3,2651
25		1,1450	1,5236	2,5500	3,6058	
30		1,4856	2,1214	3,8828	5,6828	
35		1,9266	3,0127			
40		2,5344	4,3470			

Übersicht 5. Funktionswerte der Integranden von (4).

	(x)	(20)	(30)	(40)	(45)	(50)
t						
0		1	1	1	1	1
1		0,9617	0,9583	0,9490	0,9331	0,9244
2		0,9247	0,9178	0,8992	0,8806	0,8509
3		0,8889	0,8784	0,8505	0,8229	0,7794
4		0,8541	0,8401	0,8029	0,7664	0,7099
5		0,8207	0,8028	0,7562	0,7112	0,6429
6		0,7882	0,7665	0,7106	0,6574	0,5785
7		0,7567	0,7311	0,6659	0,6051	0,5168
8		0,7262	0,6966	0,6221	0,5543	0,4581
9		0,6966	0,6630	0,5797	0,5050	0,4022
10		0,6679	0,6301	0,5379	0,4573	0,3500
15		0,5361	0,4765	0,3460	0,2490	0,1449
20		0,4208	0,3389	0,1876	0,1031	0,0382
25		0,3182	0,2179	0,0781	0,0272	
30		0,2264	0,1287	0,0206	0,0034	
35		0,1456	0,0491			
40		0,0793	0,0129			

Übersicht 6. Werte der ${}_{|n}\bar{a}_x$.

	(x)	(20)	(30)	(40)	(45)	(50)
n						
10		8,2509	8,0687	7,6043	7,1614	6,5358
20		13,6394	12,8603	11,1201	9,7550	8,1489
30		10,8394	15,0925	11,9880	10,114	
40		18,320	15,656			

Übersicht 7. Werte der $R(x, y, n)$.

	(x, y)	(20,20)	(20,30)	(30,30)	(40,40)	(45,45)	(50,50)	(30,50)
n								
10		8,452	8,446	8,433	8,333	8,158	7.840	8,332
20		14,379	14,308	14,164	13,229	12,125	10,538	13,403
30		18,355	18,047	17,432	14,750	12,796		15,671
40		20,545	19,798	18,439				

Die Zahlen der letzten Übersicht sind bis zur letzten verwendeten Ziffer gegeben. Unter der Bezifferung (20,20) usw. soll $R\,(20,20,\,n) = {}_{|n}\bar{a}_{20} + {}_{|n}\bar{a}_{20} - {}_{|n}\bar{a}_{20,20}$ verstanden werden.

Die Tabellen sind wegen des größten vorkommenden Alters 70 an der entsprechenden Stelle abgebrochen.

Die Abbildung 2 zeigt, daß die Darstellung

$$R \approx R\,(x+y,\,n) = R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ n\right)$$

erfüllt ist. Die beiden Kurven $x = y = 40$ und $x = 50,\ y = 30$ sind hier zur Übersicht ausgewählt. Sie zeigen, daß für die vorher genannten vier Bedingungen und Einschränkungen bezüglich der Alter und der Dauer (vgl. S. 2) wirklich die Abweichungen der beiden Kurven voneinander klein sind. Hier sind sie kleiner als 1,5 %.

IV. Nachweis der allgemeinen Darstellbarkeit von $R(x,y,n)$ durch $R(x+y,n)$ bei gegebener Fehlerschranke und Abschätzung des dadurch verursachten Fehlers.

Wie weit ist nun die Darstellung von $R\,(x,y,n)$ als Funktion nur von der Alterskombination $x+y$ und der Dauer n auch für andere Zahlenwerte als die oben erwähnten erlaubt? Könnten der Rechnung insbesondere auch nur gleichaltrige Paare zugrunde gelegt werden? Zur Beantwortung dieser Fragen und zur Feststellung des Fehlers dieser Darstellung wird untersucht, wie sich $R\,(x,y,n)$ bei

Variation von x ändert, wenn die Summe $x+y=f$ konstant gehalten wird. Unter $R(f_x, n)$ wird der Funktionswert von R verstanden, der sich für n und $x+y=f$ ergibt. $R\left(f_{x=\frac{f}{2}}, n\right)$ ist der Wert von R für $x=y$.

Als Maß der Vernachlässigung in R, die durch Einführung der Alterskombination $x+y$ entsteht, soll

$$T=\frac{R(f_{x_1}, n)-R(f_{x_2}, n)}{R\left(f_{x=\frac{f}{2}}, n\right)} \tag{7}$$

angenommen werden, es soll insbesondere der Vergleich eines beliebigen Paares x_2, y_2, wobei $x_2+y_2=f$ ist, mit dem Paare $x_1=y_1=\frac{f}{2}$ entwickelt werden. Im Zähler wird $R(f_{x_2}, n)$ aus $R(f_{x_1}, n)$ nach Taylor entwickelt und nach dem zweiten Glied abgebrochen. Es wird gesetzt $x_2=x+h$. Wegen der Grenzen und Bedingungen muß $h\leqq 20$ sein. Der Ansatz für $R(f_{x+h}, n)$ lautet dann

$$\begin{aligned}
&R(f_{x+h}, n)=R(f_x, n)+h\int_0^n\Big(-e^{-at-Lc^x(c^t-1)}\,L\,c^x(c^t-1)\ln c\\
&\qquad+e^{-at-Lcf\,c^{-x}(c^t-1)}\,L\,cf\,c^{-x}(c^t-1)\ln c\\
&+e^{-Ct-L(c^x+cf\,c^{-x})(c^t-1)}\,L\,(c^x\ln c-cf\,c^{-x}\ln c)\,(c^t-1)\Big)\,dt\\
&\qquad=R(f_x, n)+h\int_0^n L\ln c\,c^x\Big(-e^{-at-Lc^x(c^t-1)}\\
&+e^{-at-Lcf\,c^{-x}(c^t-1)}\,cf\,c^{-2x}+e^{-Ct-L(c^x+cf\,c^{-x})(c^t-1)}\\
&-e^{-Ct-L(c^x+cf\,c^{-x})(c^t-1)}\,cf\,c^{-2x}\Big)\,(c^t-1)\,dt.
\end{aligned} \tag{8}$$

Das Integral nimmt den Wert 0 an für $x=\frac{f}{2}$, also ist bei Abbrechen nach dem zweiten Glied $T=0$. Das nächste Glied der Taylorschen Entwicklung wird hinzugenommen. Es lautet

$$\frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}_{x=\frac{f}{2}}.$$

Darin ist

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = L \ln c \int_0^n (c^t - 1) \left[e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} L c^{2x} (c^t - 1) \ln c \right.$$

$$- c^x \ln c \, e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} + e^{-at - Lc^f c^{-x} (c^t - 1)} L (c^t - 1) c^{2f} c^{-2x} \ln c$$

$$- e^{-at - Lc^f c^{-x} (c^t - 1)} c^f c^{-x} \ln c$$

$$- e^{-Ct - L(c^x + c^f c^{-x})(c^t - 1)} L \ln c \, (c^t - 1) (c^{2x} - 2 c^f + c^{2f} c^{-2x})$$

$$\left. + e^{-Ct - L(c^x + c^f c^{-x})(c^t - 1)} \ln c \, (c^x + c^f c^{-x}) \right] dt$$

$$= L \ln^2 c \int_0^n (c^t - 1) \left[e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} \left(c^{2x} L (c^t - 1) - c^x \right) \right.$$

$$+ e^{-at - Lc^f c^{-x} (c^t - 1)} \left(L (c^t - 1) c^{2f} c^{-2x} - c^f c^{-x} \right)$$

$$- e^{-Ct - L(c^x + c^f c^{-x})(c^t - 1)}$$

$$\left. \left(L (c^t - 1) (c^{2x} - 2 c_f + c^{2f} c^{-2x}) - c^x - c^f c^{-x} \right) \right] dt.$$

Da $x \geqq y$ angenommen wurde, nimmt x als Minimum den Wert $\frac{f}{2}$ an. Außerdem gilt $x + h + n \leqq 70$, weil die Betrachtung nur bis zum rechnungsmäßig 70. Lebensjahr von x gehen soll. Die runden Klammern im letzten Integral werden für $x = \frac{f}{2}$

$$\left(c^{2f} c^{-2x} L (c^t - 1) - c^f c^{-x} \right) = c^{2x} L (c^t - 1) - c^x$$

und

$$L (c^t - 1) (c^{2x} - 2 c^f + c^{2f} c^{-2x}) - c^x - c^f c^{-x} = 0 - 2 c^x.$$

Gleichzeitig wird

$$e^{-at - Lc^f c^{-x} (c^t - 1)} = e^{-at - Lc^x (c^t - 1)}$$

und

$$e^{-Ct - L(c^x + c^f c^{-x})(c^t - 1)} = e^{-Ct - L2c^x (c^t - 1)}.$$

Damit kann geschrieben werden

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = L \ln^2 c \int_0^n (c^t - 1) \left[e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} \left(L (c^t - 1) c^{2x} - c^x \right) \right.$$

$$\left. + e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} \left(L (c^t - 1) c^{2x} - c^x \right) + e^{-Ct - L2c^x (c^t - 1)} 2 c^x \right] dt.$$

Da $C = 2A + \delta$ und $a = A + \delta$ gesetzt wurde, wird dies zu

$$(9) \qquad L \ln^2 c \, 2 c^x \int_0^n (c^t - 1) e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} \left(L c^x (c^t - 1) - 1 \right.$$

$$\left. + e^{-At - Lc^x (c^t - 1)} \right) dt.$$

Die Abschätzung dieses Integrals erfolgt nach dem Mittelwertsatz in der Form

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Dabei muß $p(x) \geqq 0$ und $a \leqq \xi \leqq b$ sein. Als $p(x)$ wird hier $(c^t - 1) \geqq 0$ angenommen. Das dritte Glied der Entwicklung von $R(f_{x+h}, n)$ wird damit

$$h^2 L \ln^2 c\, c^x e^{-a\xi - Lc^x(c^\xi - 1)} \left(L c^x (c^\xi - 1) - 1 + e^{-A\xi - Lc^x(c^\xi - 1)}\right) \int_0^n (c^t - 1)\,dt.$$

ξ liegt zwischen 0 und n. Das Integral hat den Wert

$$\frac{c^n}{\ln c} - n - \frac{1}{\ln c}.$$

In dem aus dem Integral $\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ herausgenommenen Ausdruck nimmt das Produkt

(10) $$e^{-a\xi - Lc^x(c^\xi - 1)} \left[L c^x (c^\xi - 1) - 1 + e^{-A\xi - Lc^x(c^\xi - 1)}\right]$$

für die Variablen x, ξ folgende Werte an:

Übersicht 8. Werte des Produktes (10).

x	20	30	40	50
ξ				
10	− 0,199	− 0,170	− 0,114	+ 0,011
15	− 0,212	− 0,160	− 0,050	+ 0,076
20	− 0,190	− 0,108	+ 0,023	+ 0,060
25	− 0,147	− 0,040	+ 0,055	
30	− 0,090	+ 0,019	+ 0,037	
35	− 0,030	+ 0,038		
40	+ 0,010	+ 0,024		

Es geht also, absolut genommen, nicht über 0,22 hinaus. Man kann daher das dritte Glied der R-Entwicklung abschätzen:

(11) $$\frac{h^2}{2!} L (\ln^2 c)\, c^x\, 2\left(\frac{c^n}{\ln c} - n - \frac{1}{\ln c}\right) w = h^2 L c^x (\ln c)(c^n - n \ln c - 1)\, w.$$

Darin ist w ein Wert, der von x und n gleichzeitig abhängt. Zur Abschätzung wird w der größte Wert absolut erteilt, den es für das jeweilige x annehmen kann. Also

x	30	40	50
w	0,200	0,115	0,080 .

Wenn für T noch der Wert 0,02 zugelassen wird, so entspricht dies einem Fehler von 2 % in R, der gemacht wird, wenn man an Stelle der genauen x, y-Kombination ein gleichaltriges Paar zugrunde legt, dessen Alter x mitten zwischen den beiden ursprünglichen Altern liegt. Es muß also

$$\frac{h^2 c^x (c^n - n \ln c - 1)}{R\left(f_{x=\frac{f}{2}},\ n\right)} = \frac{0{,}02}{w L \ln c}$$

gelten. Es ist offensichtlich, daß T den Größen h und n oder ihren Potenzen direkt proportional ist. Dementsprechend muß festgestellt werden, ob T an den oberen Grenzen von h und n den Wert 0,02 überschreitet, entsprechend der Feststellung, ob die rechte Seite in Abhängigkeit von w für die Alter

x	30	40	50
über die Werte	2000	3400	5000 herausgeht.

Die Übersicht über die Werte der linken Seite, für $h = 10$ und $h = 20$ (sie wird wegen $x + h + n < 70$ abgebrochen) lautet:

Übersicht 9.

	$h = 10$			$h = 20$	
	x	30	40	50	x	40
n					n	
10		360	1000	2871	10	4000
20		846	2450			
30		2155				

Es zeigt sich somit, daß für den Ansatz $T = 0{,}02$ noch $h = 10$, entsprechend einem Altersunterschied von 20 Jahren zulässig ist. Der dabei entstehende Fehler nimmt mit der Dauer der Versicherung n zu. Für $h = 20$, wo nur noch das Paar 40,40 in Frage kommt, ist der Fehler etwas größer als 2 %, er ist aber kleiner als 2,5 %.

Es ist daher, weil die Fehler an den Grenzen ihre größten Werte annehmen, zu schließen: Die Behauptung, daß R als Funktion von $x + y$ und n näherungsweise aufgefaßt werden kann, ist hier zulässig

innerhalb des oben genannten Bereichs. Die Berechnung kann sich also, wie geschehen, auf die gleichaltrigen Paare beschränken. In der Abb. 2 ist an den ausgewählten Kurven $x = y = 40$ und $x = 50$, $y = 30$ zu sehen, daß die Abweichungen für $h = 10$ kleiner als 2% bleiben. Oberhalb des vorgeschriebenen Bereiches $x + h + n \leq 70$ ist diese Näherung $R(x, y, n) \approx R(x + y, n)$ nicht mehr mit einem so kleinen Fehler möglich. Die Divergenz nimmt rasch zu, wie aus den Abweichungen der gestrichelt fortgesetzten Kurve $x = 50$, $y = 30$ gegen die Kurve $x = y = 40$ zu sehen ist (Abb. 2).

C. Herstellung der Nomogramme.

I. Vorbemerkungen.

Die Auswertung der Zahlentafel der R soll als Nomogramm erfolgen, dazu wurden die Kurven R durch Parabeln zweiten Grades angenähert. Nur die gezeichneten Kurven wurden dazu benutzt. Zur Näherung wurden die Kurven nicht ausgegeglichen, sondern die Näherungsparabeln durch die Anfangs-, Mitten- und Endwerte der einzelnen Kurven gelegt. Denn es kommt darauf an, möglichst die Anfangswerte auf der Näherungskurve zu haben, weil sich dort Fehler prozentual stärker bemerkbar machen als gleich große der Näherung in den höheren Werten von n.

Es zeigt sich dabei, daß die Abweichungen der Näherungsparabeln von den gegebenen R-Kurven unerheblich sind. Zur Näherung wurden Parabeln zweiten Grades verwendet, weil diese Parabeln erstens hier immer kleine Abweichungen gegenüber den Kurven haben, und zweitens die Darstellung als Nomogramm sehr übersichtlich gestatten. Zwar wäre auch eine höhere Näherung möglich, aber schon für eine Parabel dritten Grades ist die Verbesserung der Approximation unerheblich, außerdem wird die Darstellung als Nomogramm erheblich unübersichtlicher, denn die dabei auftretende Summe von Produkten ist zur nomographischen Darstellung wenig geeignet.

Es muß weiterhin bemerkt werden, daß die R-Kurven für $40 \leq x + y \leq 100$ natürlich zwischen den Kurven $R(40, n)$ und $R(100, n)$ liegen. Für das Alter 60,60 ist nur noch der Wert für $n = 10$ in der Zeichnung vorhanden, da die Versicherungsdauer eines solchen Paares nur 10 Jahre betragen kann.

II. Aufstellung der Koeffizienten der Näherungsparabeln als Funktion von $x+y$.

Für die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der Näherungsparabeln

$$R(x+y, n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$$

ergibt sich:

Übersicht 10.

Alter $y+x$	a_0	a_1	a_2
40	0,721	0,865 7	— 0,009 25
50	0,589	0,887 6	— 0,010 19
60	0,326	0,930 0	— 0,011 93
80	0,060	0,996 1	— 0,016 88
90	— 0,052	1,030 0	— 0,020 90
100	— 0,260	1,085 0	— 0,027 50

Sofort ersichtlich ist, daß die Koeffizientenfolgen in sich monoton abnehmend oder zunehmend sind. Diese Koeffizienten kann man als Funktion von $x+y$ auffassen, also schreiben

$$R(x+y, n) = a_0(x+y) + a_1(x+y)n + a_2(x+y)n^2$$

Die a_ν sind dabei genähert durch ein Polynom fünften Grades

$$a_0(x+y) = b_0 + b_1(x+y) + b_2(x+y)^2 + b_3(x+y)^3 + b_4(x+y)^4 + b_5(x+y)^5.$$

Entsprechend für a_1, a_2 durch Polynome mit den Koeffizienten c_ν und d_ν.

Der Grad dieser Approximation in $x+y$ spielt dabei nicht die Rolle wie bei dem Näherungspolynom für R, wie aus der weiteren Entwicklung ersichtlich ist.

Die Berechnung der b_ν, c_ν, d_ν erfolgt mit Hilfe der Ausgleichsrechnung. Dabei wird, da der Grad des Näherungspolynoms hier um eins kleiner ist als die Zahl der gegebenen Punkte, der Fehler der Näherungskurve in diesen Punkten identisch 0.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird die neue Variable

$$u = \frac{1}{10}(x+y-70)$$

eingeführt. Dadurch entsprechen sich

$x+y$:	40	50	60	80	90	100
u:	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$

Die neuen Konstanten mögen b_ν', c_ν', d_ν' sein. Ihre Berechnung zerfällt[6]) in die beiden Systeme b_0', b_2', b_4'; b_1', b_3', b_5', entsprechend für c_ν', d_ν'. Die Koeffizienten b_ν', c_ν', d_ν' berechnen sich aus den Gleichungen

$$\sum_\varkappa a_{\iota\varkappa}\, b_\varkappa' = \beta_\iota^{(b')} \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei wird

$$a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota} = \sum_\nu u_\nu^\iota\, u_\nu^\varkappa$$

und

$$\beta_\iota^{(b')} = \sum_\nu u_\nu^\iota\, a_0\,,$$

$$\beta_\iota^{(c')} = \sum_\nu u_\nu^\iota\, a_1\,,$$

$$\beta_\iota^{(d')} = \sum_\nu u_\nu^\iota\, a_2\,.$$

Dabei gilt für das transformierte System der u_ν

$$a_{\iota\varkappa} = 0\,,$$

wenn $\iota + \varkappa$ kein Vielfaches von 2 ist. Bei der Rechnung ist sofort zu sehen, daß nur die β von b_ν', c_ν', d_ν' abhängen, während die $a_{\iota\varkappa}$ für alle Größen dieselben sind.

Übersicht 11. Werte der β_ι.

	b'	c'	d'
β_0	+ 1,383 5	+ 5,794 4	− 0,096 7
β_1	− 4,490 0	+ 1,008 8	− 0,081 1
β_2	+ 6,679 5	+ 27,152 8	− 0,483 9
β_3	− 31,877 3	+ 7,126 4	− 0,583 3
β_4	+ 46,291 5	+ 190,414 5	− 3,503 0
β_5	− 259,130 9	+ 57,912 8	− 4,782 4

Bei Einsetzen der entsprechenden Größen bestehen dann die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr}
6\,b_0' & + & 28\,b_2' & + & 196\,b_4' & = & \\
28\,b_1' & + & 196\,b_3' & + & 1588\,b_5' & = & \\
28\,b_0' & + & 196\,b_2' & + & 1588\,b_4' & = & \\
196\,b_1' & + & 1588\,b_3' & + & 13636\,b_5' & = & \\
196\,b_0' & + & 1588\,b_2' & + & 13636\,b_4' & = & \\
1588\,b_1' & + & 13636\,b_3' & + & 120148\,b_5' & = &
\end{array}\right\} \beta_\iota^{(b', c', d')}.$$

[6]) G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Sammlung Göschen, Berlin, 1937, S. 102 und ff.

In das System der $x+y$ umgerechnet durch $u=\frac{1}{10}(x+y-70)$, erhält man:

$$b_0 = -19{,}202\,2 \qquad c_0 = +2{,}882\,7$$
$$b_1 = +1{,}524\,62 \qquad c_1 = -0{,}152\,24$$
$$b_2 = -0{,}044\,234 \qquad c_2 = +0{,}004\,258$$
$$b_3 = +0{,}000\,609\,4 \qquad c_3 = -0{,}000\,055\,7$$
$$b_4 = -0{,}000\,004\,04 \qquad c_4 = +0{,}000\,000\,35$$
$$b_5 = +0{,}000\,000\,010\,39 \qquad c_5 = -0{,}000\,000\,000\,825$$

$$d_0 = -0{,}053\,0$$
$$d_1 = +0{,}003\,10$$
$$d_2 = -0{,}000\,079$$
$$d_3 = +0{,}000\,000\,877$$
$$d_4 = -0{,}000\,000\,004\,2$$
$$d_5 = +0{,}000\,000\,000\,004\,3$$

Die Mitnahme von allen gegebenen Stellen ist nötig wegen der Größe der Potenzen von $x+y$. Die vorgenommene Darstellung der Koeffizienten a_ν als Funktionen von $x+y$ heißt, daß zwischen den R mit Parabeln fünften Grades interpoliert wird.

III. Herstellung des ersten Nomogramms.

Die nomographische Darstellung beruht auf dem Gedanken, die Gleichung

$$R(x+y, n) = a_0(x+y) + a_1(x+y)\,n + a_2(x+y)\,n^2$$

als quadratische Gleichung in n aufzufassen, wo bei vorgegebenem $a_\nu(x+y)$ das Glied $R(x+y, n)$ implizit gegeben ist:

$$n^2 + \mathfrak{A}_1\,n + \mathfrak{A}_0 = 0$$

mit

$$\frac{a_1}{a_2} = \mathfrak{A}_1, \qquad \frac{a_0 - R}{a_2} = \mathfrak{A}_0.$$

Aus dieser Gleichung wird durch das erste Nomogramm $\mathfrak{A}_0$ bestimmt; im zweiten Nomogramm wird aus $\mathfrak{A}_0$ der Wert $R(x+y, n)$ hergestellt.

Für das erste Nomogramm müssen die Bereiche der auftretenden Größen festgestellt werden. $\mathfrak{A}_1$ nimmt dabei die Werte an

$x+y$	40	50	60	80	90	100
$\mathfrak{A}_1$	$-93{,}59$	$-87{,}12$	$-77{,}95$	$-59{,}01$	$-49{,}28$	$-39{,}50$

die Bereiche der Größen sind also

$$\begin{aligned} n &: \quad 10 \ldots \quad 40 \\ \mathfrak{A}_1 &: -94 \ldots -39 \\ \mathfrak{A}_0 &: -24 \ldots +2160 \end{aligned}$$

Zur praktischen Verwendung wird die Verzerrung

$$\mathfrak{A}_1 = F\mathfrak{A}_1' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_0 = F^2\mathfrak{A}_0'$$

durchgeführt, so daß

$$n^2 + \mathfrak{A}_1 n + \mathfrak{A}_0 = F^2 n^{2\prime} + F\mathfrak{A}_1' Fn' + F^2\mathfrak{A}_0' = 0$$

wird. Die Größe von F wird festgelegt durch die Forderung, daß die Bereiche, innerhalb deren $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_0'$ schwanken, gleich lang sein sollen, was auf

$$F = 39{,}8 \approx 40$$

führt. Es entsteht also

$$n^{2\prime} + \mathfrak{A}_1' n' + \mathfrak{A}_0' = 0$$

mit

$$\mathfrak{A}_1' = \frac{\mathfrak{A}_1}{40}, \qquad \mathfrak{A}_0' = \frac{\mathfrak{A}_0}{1600}$$

Die Bereiche der einzelnen Größen sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &: -2{,}35 \quad \ldots -0{,}975 \\ \mathfrak{A}_0' &: -0{,}015 \ldots +1{,}35 \\ n' &: +0{,}025 \ldots +1\,. \end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung kann als Determinante mit den Maßstabsfaktoren l und m geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} 0 & l\mathfrak{A}_0' & 1 \\ m & l\mathfrak{A}_1' & 1 \\ \dfrac{mn'}{1+n'} & \dfrac{-ln'^2}{1+n'} & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Es ist demnach eine Darstellung als Nomogramm aus zwei parallelen Geraden und einem dazwischen liegenden Hyperbelast möglich [7]).

Dreht man die η-Achse (vgl. Abb. 3) um den Winkel α, so kann man dadurch erreichen, daß ein Bereich der η-Achse einem anderen

[7]) D'Ocagne, Traité de Nomographie. Paris, 1921. S. 216 u. f.

beliebigen gleichlangen Bereich auf einer dazu parallelen Geraden genau gegenüber liegt. Damit ist der Weg gegeben, das gesuchte Nomogramm wird in einem passend schiefwinklig gewählten Koordinatensystem gezeichnet. Der Abstand der Parallelen und die Länge der Skalen sind frei wählbar. Der Winkel zwischen den Koordinatenachsen ergibt sich, wie Abb. 3 zeigt, zu $\alpha = 154^0\ 40'$. Der Ansatz des Nomogramms lautet also mit den ursprünglichen Größen, wenn $l = 1$ und $m = -2{,}567$ angenommen wird,

$$\xi_1 = 0\,, \qquad \eta_1 = \frac{\mathfrak{A}_0}{1600}\,,$$

$$\xi_2 = -2{,}567\,, \qquad \eta_2 = \frac{\mathfrak{A}_1}{40}\,,$$

$$\xi_3 = \frac{-2{,}567\,n}{40\left(1+\frac{n}{40}\right)}\,, \qquad \eta_3 = \frac{-n^2}{1600\left(1+\frac{n}{40}\right)}\,.$$

Auf der $\mathfrak{A}_1$-Leiter werden dabei nicht die Quotientenwerte $\frac{a_1(x+y)}{a_2(x+y)}$ aufgetragen, sondern gleich die zugehörigen Werte der Alterskombination $x+y$. Die Werte der n sind direkt aufgetragen. Die $\mathfrak{A}_0$-Leiter trägt keine Bezifferung, da diese Werte nicht explizit gebraucht werden. Dabei ist die nicht aufgetragene Teilung der $\mathfrak{A}_0$-Leiter eine gleichmäßige.

IV. Herstellung des zweiten Nomogramms.

$\mathfrak{A}_0$ war die Abkürzung für den Ausdruck

$$\frac{a_0(x+y) - R(x+y, n)}{a_2(x+y)}\,.$$

Man kann $\mathfrak{A}_0$ auch als Determinante mit den Konstanten r und j in der Form schreiben

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_0 & 1 \\ 1 & -rR+j & 1 \\ \dfrac{1}{1-ra_2} & \dfrac{-ra_0+j}{1-ra_2} & 1 \end{vmatrix}\,,$$

so daß

$$\xi_4 = 0 \qquad \eta_4 = \mathfrak{A}_0$$

$$\xi_5 = 1 \qquad \eta_5 = -rR+j$$

$$\xi_6 = \frac{1}{1-ra_2} \qquad \eta_6 = \frac{-ra_0+j}{1-ra_2}$$

den Ansatz für das zweite Nomogramm liefert. Da hier, wie im ersten Nomogramm, die $\mathfrak{A}_0$-Leiter eine gleichmäßige Teilung trägt, so können diese beiden Leitern aus dem ersten und zweiten Nomogramm zu der in der Mitte des am Schluß befindlichen Nomogramms liegenden Zapfenlinie überlagert werden. Sie trägt keine Bezifferung. Die Bereiche der Variablen sind zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &: \quad -24 \ldots\ldots +2160 \\ R &: \quad +7{,}5 \ldots\ldots + \quad 21 \\ a_0 &: \quad -0{,}27 \ldots\ldots + \quad 0{,}72 \\ a_2 &: \quad -0{,}027\,5 \ldots - \quad 0{,}009\,25 \end{aligned}$$

angenommen.

Es wird $r = 161{,}8$ und $j = 3373{,}3$ gewählt. Die Kurve trägt wieder die Bezifferung nach dem zugehörigen $x + y$. Die R-Teilung ist gleichmäßig.

V. Gebrauch der zusammengefaßten Nomogramme.

Die Ablesung verläuft auf dem zusammengefaßten Nomogramm so, daß auf der Geraden ganz links der Wert von $x + y$ aufgesucht wird. Seine gradlinige Verbindung mit dem der Versicherungsdauer entsprechendem n schneidet in der Verlängerung die Zapfenlinie. Dieser Schnittpunkt wird mit dem $x + y$-Wert auf der folgenden Kurve geradlinig verbunden, die Verlängerung trifft die R-Gerade in $R(x+y, n)$.

Die Genauigkeit der Ablesung läßt sich durch größere Zeicheneinheiten und Verfeinerung der Teilungen steigern bis zu einer Grenze, die durch die Vernachlässigungen und Vereinfachungen bei der Entstehung des Nomogramms bestimmt wird. Wegen der Kleinheit der Wiedergabe kommt die Zeichnung nicht bis an diese Grenze. Wesentlicher als dies ist der systematische Fehler, der bei der praktischen Verwendung durch Änderung der Konstanten der Sterbeintensitäten entsteht. Diese Änderung kann durch Gebrauch einer dynamischen Sterbetafel oder anderer Sterbetafeln bedingt sein. Die Abschätzung des systematischen Fehlers erfolgt mittels der Fehlerrechnung.

D. Abschätzung des Einflusses einer Änderung der Konstanten der Gompertz-Makehamschen Sterblichkeitsformel.

Änderung von A.

Bei der Änderung von A in Formel (6), üblicherweise in der G.-M. Sterbeformel als dem äußeren Einfluß entsprechend gedeutet, gilt

$$\frac{\partial R}{\partial A}\,\partial A = \int_0^n - \left(e^{-at-Lc^x(c^t-1)}\,t\,\partial A + e^{-at-Lc^y(c^t-1)}\,t\,\partial A\right.$$

$$\left. - e^{Ct-L(c^x+c^y)(c^t-1)}\,t\,2\,\partial A\right) dt$$

$$= -\partial A \int_0^n t\left(e^{-at-Lc^x(c^t-1)} + e^{-at-Lc^y(c^t-1)}\right.$$

$$\left. - 2\,e^{-Ct-L(c^x+c^y)(c^t-1)}\right) dt\,.$$

Die Abschätzung erfolgt nach dem Mittelwertsatz in der Form

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx \quad \text{für} \quad p(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad a \leqq \xi \leqq b\,.$$

Bei der Annahme, daß die Summe der Exponentialfunktionen den Betrag 1 hat, wird für $p(x) = t$ die Änderung von R, wenn sich A ändert

$$\partial_A R = -\partial A\,\frac{n^2}{2}\,. \tag{12}$$

Wenn man eine Änderung von A um 10 % annimmt, so wird für die hier verwendeten Grundlagen

$$\partial_A R = -\frac{n^2}{2}\,0{,}000\;25 = -n^2\,0{,}000\;13\,.$$

Also

u :	10	20	30	40
$\partial_A R$:	−0,013	−0,052	−0,12	−0,2

Zum Beispiel würde $\partial_A R\,(60, 40)$ im Extrem kleiner als 1,5 % von $R\,(60, 40)$ sein, wenn die Änderung von A 10 % beträgt. Der Einfluß einer Änderung der äußeren Verhältnisse ist also formelmäßig nicht erheblich. Das Vorzeichen zeigt hier an, daß R mit fallendem A zunimmt.

Änderung von c.

Wegen

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{B}{\ln c}\right) = -\frac{L}{c \ln c}$$

gilt für die Änderung der Konstanten c

$$\partial_c R = \partial c \int_0^n \Big\{ - e^{-at - Lc^x(c^t-1)} \Big[- c^x (c^t - 1) \frac{L}{c \ln c}$$

$$+ L \left((x+t) c^{x+t-1} - x c^{x-1} \right) \Big] - e^{-at - Lc^y(c^t-1)} \Big[- c^y (c^t - 1) \frac{L}{c \ln c}$$

$$+ L \left((y+t) c^{y+t-1} - y c^{y-1} \right) \Big] + e^{-Ct - L(c^x + c^y)(c^t-1)} \Big[- (c^x + c^y)(c^t - 1) \frac{L}{c \ln c}$$

$$+ L \left((x+t) c^{x+t-1} - x c^{x-1} + (y+t) c^{y+t-1} - y c^{y-1} \right) \Big] \Big\} d t .$$

Für gleichaltrige Paare wird wegen

$$L (x+t) c^{x+t-1} - x c^{x-1} = L c^{x-1} \left(x (x^t - 1) + t c^t \right)$$

das Integral zu

$$\partial_c R = \partial c \int_0^n 2 \Big[- c^x \frac{L}{c \ln c} (c^t - 1) + L c^{x-1} \left(x (c^t - 1) + t c^t \right) \Big]$$

$$\left(- e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} + e^{-Ct - 2Lc^x (c^t - 1)} \right) d t .$$

Dies wird abgeschätzt als

$$(13) \qquad \partial c \, 2 (\xi_1) (\xi_2) \int_0^n d t = \partial c \, 2 n (\xi_1) (\xi_2) .$$

Dabei wird hier und bei dem später folgenden $\partial_B R$ an Stelle des Zwischenwertes ξ von t der höchste Wert für die gegebene Dauer, also n, benutzt.

Übersicht 12. Werte der Faktoren von $n \, \partial c$.

x / n	20	30	40	50
10	− 0,040	− 0,084	+ 0,166	+4,36
20	− 0,153	+ 0,016	+ 2,016	+4,60
30	− 0,084	+ 1,420	+ 1,770	
40	+ 0,645	+ 1,187		

Aus dieser Übersicht ist zu ersehen, daß R gegen Änderungen von c recht empfindlich ist. Denn einer Änderung von c um 2%, also $\partial c = 0{,}022$, entspricht für $x = y = 30$ und $n = 30$ eine Änderung von

R um 5 %. Bei langen Dauern und hohen Altern wächst die Empfindlichkeit rasch. So ist $\partial_c R\,(100{,}20)$ für $\partial c = 0{,}022$ schon etwa 25 %. Das Vorzeichen der Änderung ist für n aus der Übersicht zu entnehmen.

Änderung von B.

Die Änderung von B hat auf R folgenden Einfluß, schon für gleiche Alter genommen

$$\partial_B R = \partial B \int_0^n \Big(-2\,e^{-at - Lc^x (c^t - 1)} \frac{c^x}{\ln c} (c^t - 1) + 2\,e^{-Ct - 2Lc^x (c^t - 1)} \frac{c^x}{\ln c} (c^t - 1) \Big)\, dt\,.$$

Dies wird abgeschätzt

$$(14) \quad \partial B \frac{2\,c^x}{\ln c} (c^n - 1) \left(- e^{-an - Lc^x (c^n - 1)} + e^{-Cn - 2Lc^x (c^n - 1)} \right) n\,.$$

Übersicht 13. Größe des Faktors von $n\,\partial B$.

x	20	30	40	50
n				
10	— 51	— 55	— 1280	— 4750
20	— 340	— 1490	— 4315	— 3590
30	— 122	— 360	— 208	
40	— 185	— 146		

Bei einer Änderung von B um 10 % ändert sich $R\,(100{,}20)$ um 3,5 %. Einem zunehmenden B entspricht, nach dem Vorzeichen in der Übersicht, ein abnehmendes R.

Zusammenfassend ist zu sagen:

R ist am empfindlichsten für Änderungen in c, weniger empfindlich für Änderungen in B, und am wenigsten für solche in A. Wie weit Änderungen dieser Konstanten überhaupt möglich sind, müßte getrennt hiervon untersucht werden; sie sind im allgemeinen nicht erheblich[8]).

Die Entscheidung, ob das Nomogramm verwendet werden kann, folgt jedenfalls immer aus der im einzelnen Fall verwendeten Sterbe-

[8]) Vgl. P. Riebesell, Über eine dynamische Sterbetafel.

tafel und ihren Konstanten. Die Größe der Änderungen von A, B, c macht es wahrscheinlich, daß das Nomogramm für R in weitem Umfang gelten wird. Zu seinem Gebrauch muß der Fehler mit Hilfe der Abschätzungen aus den Konstanten der Sterbetafel festgestellt werden. Damit ist durch die Vorzeichen der Einzelfehler auch das Vorzeichen der etwa an R anzubringenden Verbesserung bekannt.

E. Umrechnung der Ergebnisse auf diskontinuierliche Betrachtungsweise.

Zur praktischen Verwendung des Nomogramms muß noch der Zusammenhang zwischen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Betrachtungsweise für die hier benutzten abgekürzten Versicherungswerte gezeigt werden. Die Leistung des Versicherungsträgers soll also nicht mehr in jedem Zeitelement dt erfolgen, sondern in Intervallen, etwa am Anfang oder am Ende eines jeden Jahres der Versicherungsdauer. Die Leistung des Versicherungsnehmers soll wie bisher am Anfang der Versicherung geschehen. Die Feststellung der Art des gesuchten Zusammenhanges erfolgt mit Hilfe der Eulerschen Summenformel.

$$(15) \qquad \int_a^b f(\xi)\,d\xi = h\sum_a^b f(\xi) + \frac{h}{2}\left[f(\xi)\right]_a^b - \frac{h^2}{12}\left[f'(\xi)\right]_a^b \pm \cdots$$

Von den Gliedern höherer Ordnung wird abgesehen. Als $f(\xi)$ wird hier der Integrand

$$(3)' \qquad e^{-\int_0^t \mu(x+\xi)\,d\xi - \delta t} = e^{-\delta t}\, e^{-\int_0^t \mu(x+\xi)\,d\xi}$$

vor Ausführung der Integrale im Exponenten, entsprechend für y und das verbundene Paar xy, angenommen. a und b der Formel sind hier die Grenzen 0 und n, h wird, entsprechend der jährlichen Leistung des Versicherungsträgers am Anfang eines jeden Jahres, als 1 angenommen. Der Integrand schreibt sich dann für x (siehe B, II)

$$v^t\,{}_tp_x = v^t\,\frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{D_{x+t}}{D_x},$$

für y

$$v^t\,{}_tp_y = \frac{D_{y+t}}{D_y}$$

und für das verbundene Paar xy

$$v^t\,{}_tp_{x\,y} = \frac{D_{x+t}}{D_{x\,y}}\frac{y+t}{}.$$

Die Ableitungen sind

$$\left(\frac{v^t\,l_{x+t}}{l_x}\right)' = \frac{l_{x+t}}{l_x}\,v^t \ln v + v^t\,\frac{d\,(l_{x+t})}{d\,t\,l_x}$$

$$= \frac{l_{x+t}}{l_x}\,v^t \ln v + v^t\,\frac{l_{x+\,t}}{l_x}\,\frac{d\,(l_{x+t})}{d\,t\,l_{x+t}}$$

$$= \ln v\,\frac{D_{x+t}}{D_x} - \mu\,(x+t)\,\frac{D_{x+t}}{D_x}.$$

Für $\ln v$ wird $-\delta$ gesetzt, an der Stelle $t=0$ wird die Ableitung zu

$$\ln v - \mu\,(x) = -\delta - \mu\,(x)$$

an der Stelle $t=n$ zu

$$-\delta\,\frac{D_{x+n}}{D_x} - \mu\,(x+n)\,\frac{D_{x+n}}{D_x};$$

für y wird

$$-\delta - \mu\,(y) \quad \text{und} \quad -\delta\,\frac{D_{y+n}}{D_y} - \mu\,(y+n)\,\frac{D_{y+n}}{D_y}.$$

Für das verbundene Paar ist die Ableitung

$$\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\,v^t \ln v + v^t\,\frac{d\,(l_{x+t})}{d\,t\,l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y} + v^t\,\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{d\,(l_{y+t})}{d\,t\,l_y}$$

$$= \frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\,v^t \ln v - v^t\,\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\,\mu\,(x+t) - v^t\,\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\,\mu\,(y+t).$$

An der unteren Grenze wird dieser Ausdruck zu

$$-\delta - \mu\,(x) - \mu\,(y),$$

an der oberen Grenze zu

$$-\frac{D_{x+n\,y+n}}{D_{x\,y}}\,\delta - \mu\,(x+n)\,\frac{D_{x+n\;y+n}}{D_{x\,y}} - \mu\,(y+n)\,\frac{D_{x+n\,y+n}}{D_{x\,y}}.$$

Eingesetzt ergibt sich damit, vereinfacht (üblicherweise wird $\frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x$, entsprechend für y und $x\,y$ gesetzt)

$$
\begin{aligned}
{}_n\bar{a}_x &\approx {}_n a_x + \frac{1}{2}\,{}_nE_x - \frac{1}{2} \quad \vdots \quad - \frac{1}{12}\,(1 - {}_nE_x)\,[\delta + \mu\,(x+n)] \\
{}_n\bar{a}_y &\approx {}_n a_y + \frac{1}{2}\,{}_nE_y - \frac{1}{2} \quad \vdots \quad - \frac{1}{12}\,(1 - {}_nE_y)\,[\delta + \mu\,(y+n)] \\
{}_n\bar{a}_{xy} &\approx {}_n a_{xy} + \frac{1}{2}\,{}_nE_{xy} - \frac{1}{2} \quad \vdots \quad - \frac{1}{12}\,(1 - {}_nE_{xy})\,[\delta + \mu\,(x+n) + \mu\,(y+n)]\,.
\end{aligned}
$$

Die durch den Strich abgetrennten Summanden werden weggelassen, denn sie betragen weniger als 1 % der kontinuierlich genommenen Rente, wie sich aus der Größe der jeweils zweiten Klammern nach Multiplikation mit $\frac{1}{12}$ ergibt.

Durch Zusammenfassung dieser drei Gleichungen durch Addition der ersten beiden und Subtraktion der dritten ergibt sich

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
R\,(x,y,n) &\approx R\,(x+y,n) \\
&\approx {}_n a_x + {}_n a_y - {}_n a_{xy} + \frac{1}{2}\,({}_nE_x + {}_nE_y - {}_nE_{xy}) - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Daraus folgt

$$
(17)\quad {}_n a_{xy} \approx {}_n a_x + {}_n\bar{a}_y + \frac{1}{2}\,({}_nE_x + {}_nE_y - {}_nE_{xy}) - \frac{1}{2} - R\,(x+y,n)\,.
$$

Die diskontinuierliche Rente ${}_n a_{xy}$ für das Paar ist damit auf die Einzelrenten mit angesetzten Verbesserungen durch sehr einfach zu berechnende Versicherungswerte und ein als Nomogramm vorliegendes Ergänzungsglied zurückgeführt. Die Abweichungen des so hergestellten ${}_n a_{xy}$ gegen das direkt aus denselben Rechnungsgrundlagen berechnete, die bedingt sind:

1. durch die Einführung der Alterskombination $x+y$ aus den Einzelaltern (Einzelfehler $< 2{,}5$ %).

2. aus dem Abbruch der Umrechnungsformeln von kontinuierlichen zu diskontinuierlichen Werten (Einzelfehler < 1 %),

bleiben damit unterhalb 3,5 %.

F. Eine Anwendung.

Das Nomogramm soll eine Anwendung bei der Beurteilung der im Anfang beschriebenen Methode *M* finden. Dazu muß der Zusammenhang zwischen der Einmalprämie am Anfang der Versicherung und den jährlichen Prämien während der Dauer n der Versicherung für

eine gemischte Todesfallversicherung festgestellt werden. In der üblichen Bezeichnungsweise ist $M_x = D_x - d\,N_x$, entsprechend $M_{xy} = D_{xy} - d\,N_{xy}$. Damit wird

$$P_{x\,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

zu

$$P_{x\,\overline{n}|} = \frac{D_x - d\,N_x - D_{x+n} + d\,N_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} - d\,\frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d\,,$$

Für y und xy gibt die entsprechende Entwicklung

$$P_{y\,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}a_y} - d \quad \text{und} \quad P_{xy\,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}a_{x\,y}} - d\,.$$

Die Differenz der Nettoprämien $Z(x+y, n)$ wird mit Hilfe dieser Formeln hier für die Alter 20 und 40 gerechnet.

$$Z(x+y, n) = P_{x\,\overline{n}|} + P_{y\,\overline{n}|} - P_{xy\,\overline{n}|}$$

Diese Differenzen $Z(x+y, n)$ werden aufgetragen und gleichzeitig das aus dem Tarif sich ergebende $f(n)$. (In der Zeichnung mit M bezeichnet, Zeichnung 4). Die Abscisse ist nach n, die Ordinate nach den Unterschieden Z beziffert. Man sieht sofort die starken Abweichungen der Kurven voneinander, dabei ist aber noch zu beachten, daß hier Netto- und Bruttowerte gegenübergestellt sind. Die Umrechnung von $f(n)$ in den Nettowert erfolgt mit Hilfe der Annahme, den Zusammenhang zwischen Netto- (N) und Brutto- (B) Prämien für dieselben Grundlagen als $P_N = g \cdot P_B$ auffassen zu können. Dabei ist $g < 1$. Damit wird

$$f(n)_N = g\,f(n)_B\,.$$

Für die hier benutzten speziellen Zahlenwerte ergibt sich, daß für ein so bestimmtes g, das den Punkt $Z(x = y = 40, n = 10)$ mit $f(10)_N$ zusammenfallen läßt, die Abweichungen zwischen den beiden Kurven $Z(40,40,n)$ und $f(n)_N$ für die längeren Dauern n noch größer werden. Auf jeden Fall wird durch Multiplikation von $f(n)$ mit g erreicht, daß etwa für $n = 30$ seine Abweichung gegen $Z(40, 40, 30)$ größer als 25 % ist. g ist hier so gewählt, daß $Z(x = y = 40,\ n = 10)$ und $f(10)$ zusammenfallen, damit wird $g = 0{,}85$.

Die nach der Vorschrift $\frac{Z-f(n)_N}{Z}100$ berechneten Fehlerprozente sind in der mit π bezeichneten Kurve eingetragen worden. Da die Z-Kurven stark voneinander abweichen, so ist eine etwa erfolgende Mittelung mit Fehlern verbunden, die hier für $n=30$ über 20 % liegen. Es wäre auch denkbar, eine Mittelkurve Q zu konstruieren, bei der die zur Mittelbildung benutzten Werte mit verschiedenen Gewichten, entsprechend der Häufigkeit ihres Auftretens im Versicherungsbetrieb behaftet sind. Doch würde dies den größtmöglichen Fehler für große n wiederum bei den seltener vorkommenden Altern vergrößern.

Die Methode M weist also Fehler auf, die sehr erheblich sind. Dabei sind die Fehler auf die Größe von n ungleichmäßig verteilt, so daß die kleinen n, also kleine Versicherungsdauern, viel günstiger behandelt werden, als die längeren Dauern.

G. Zusammenfassung.

1. Bei kontinuierlicher Betrachtungsweise ist es möglich, die Differenz zwischen der Summe der Einzelrenten und der Verbindungsrente bei zwei Personen als Funktion der Summe der Einzelalter x und y und der Dauer n darzustellen. Der dabei gemachte Fehler bleibt unterhalb der Schranke 2,5 %.

2. Die Darstellung dieser Funktion R als Nomogramm ist wenig empfindlich gegen Änderungen der Rechnungsgrundlagen. Hierbei ist auch eine Änderung der Zinsintensität eingeschlossen, denn eine Änderung des Gliedes A kann auch als Änderung von δ aufgefaßt werden, wie aus $a=A+\delta$ folgt.

3. Die Methode M der Berechnung einer Verbindungsrente mit Hilfe eines nur von n abhängigen Ergänzungsgliedes ist mit großen Fehlern verbunden.

4. Mit Hilfe der Funktion R können die Versicherungswerte für verbundene Leben einer dynamischen Sterbetafel leicht angepaßt werden.

Zahlentafel.

Benutzte Sterbetafel . . . Grundtafel für versicherungsmathematische Übungen an deutschen Hochschulen, herausgeg. vom Verein deutscher wissenschaftlicher und leitender praktischer Versicherungs- und Wirtschaftsmathematiker e. V., Berlin. Berechnet aus Sterbetafel Deutsches Reich, Männer 1924—1926.

$\mu_{(x+t)} = 0{,}002\,52 + 0{,}000\,050\,7 \cdot 1{,}105\,02^{x+t}$

$i = 0{,}035$

$d = 0{,}033\,816\,4$

$\delta = 0{,}034\,440\,4$

$c = 1{,}105\,02$

$\ln c = 0{,}018\,835\,4$

$A = 0{,}002\,52 \qquad = -\ln s$

$B = 0{,}000\,050\,7$

$L = \dfrac{B}{\ln c} = 0{,}002\,691 \qquad = -\ln g$

$a = A + \delta = 0{,}036\,96$

$C = 2A + \delta = 0{,}039\,48$

Abb. 1

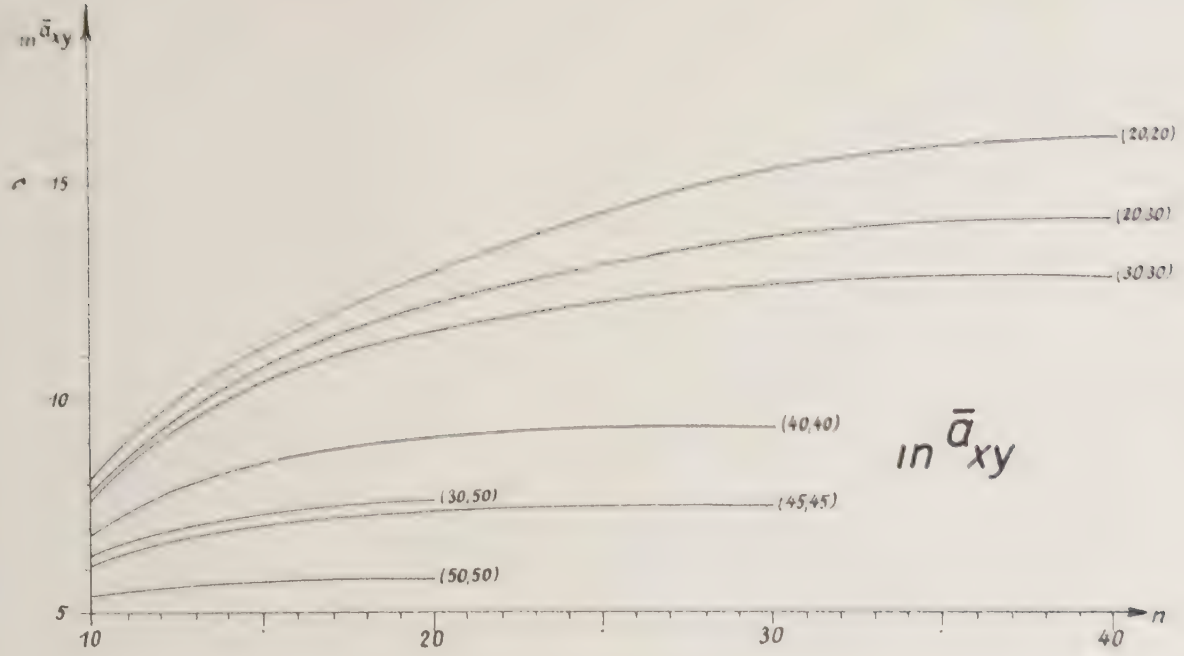

ln $\bar{a}_{xy}$
15
10
5
(20,20)
(20,30)
(30,30)
(40,40)
(30,50)
(45,45)
(50,50)
ln $\bar{a}_{xy}$
10
20
30
40
n

Abb. 2

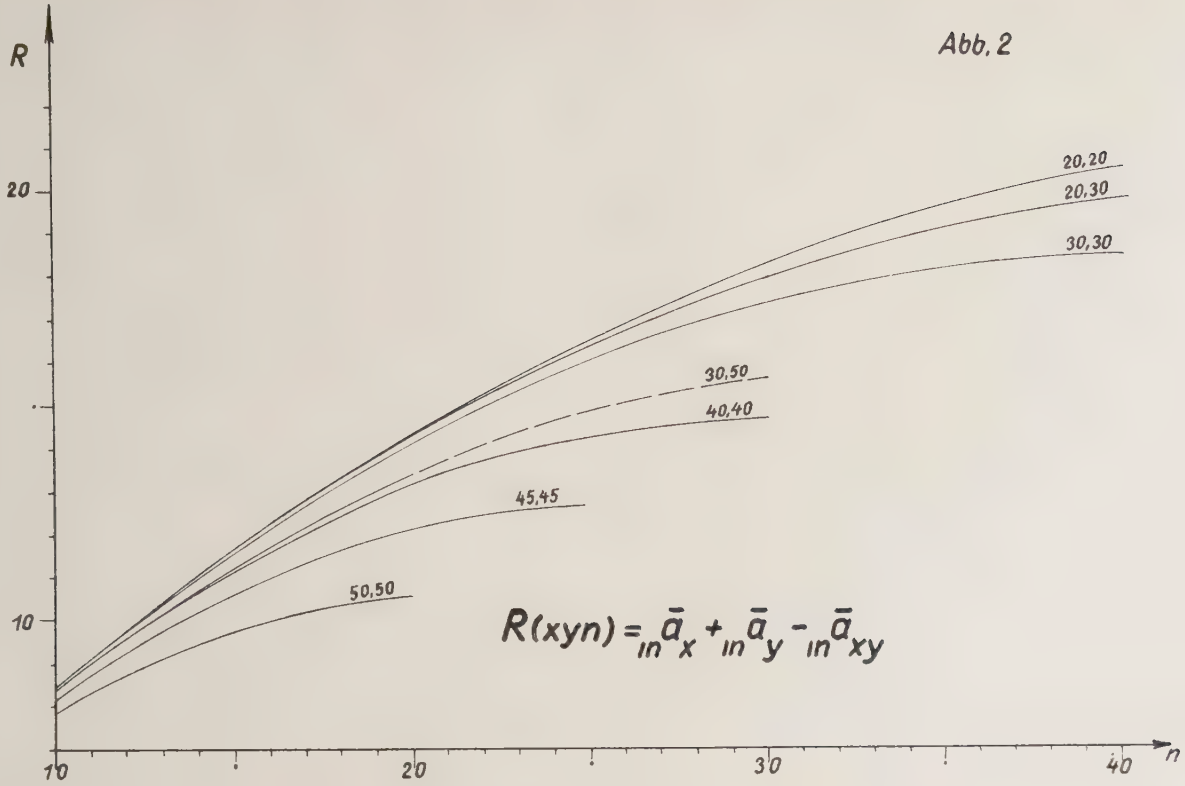

R
20
10
20,20
20,30
30,30
30,50
40,40
45,45
50,50
$R(xyn) = {}_{in}\bar{a}_x + {}_{in}\bar{a}_y - {}_{in}\bar{a}_{xy}$
10
20
30
40
n

Abb. 3

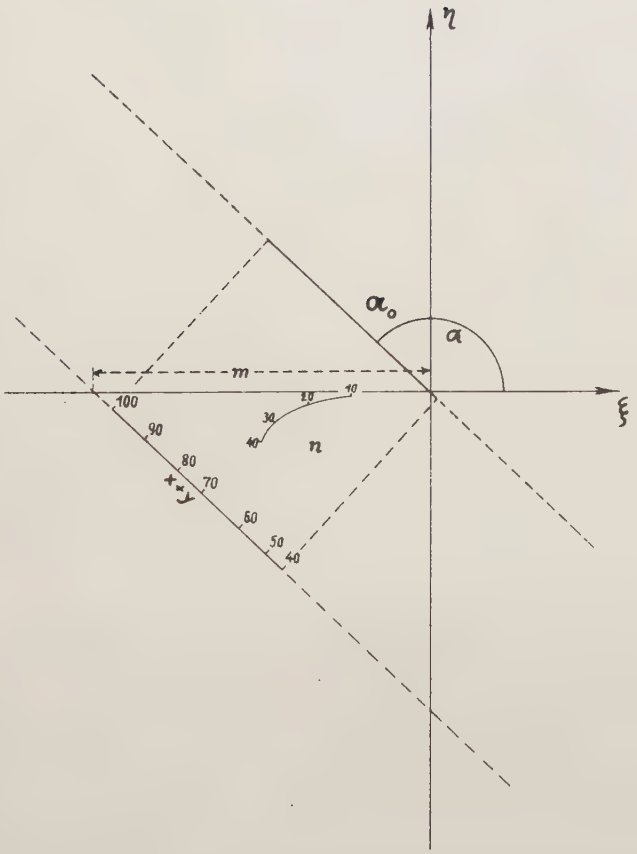
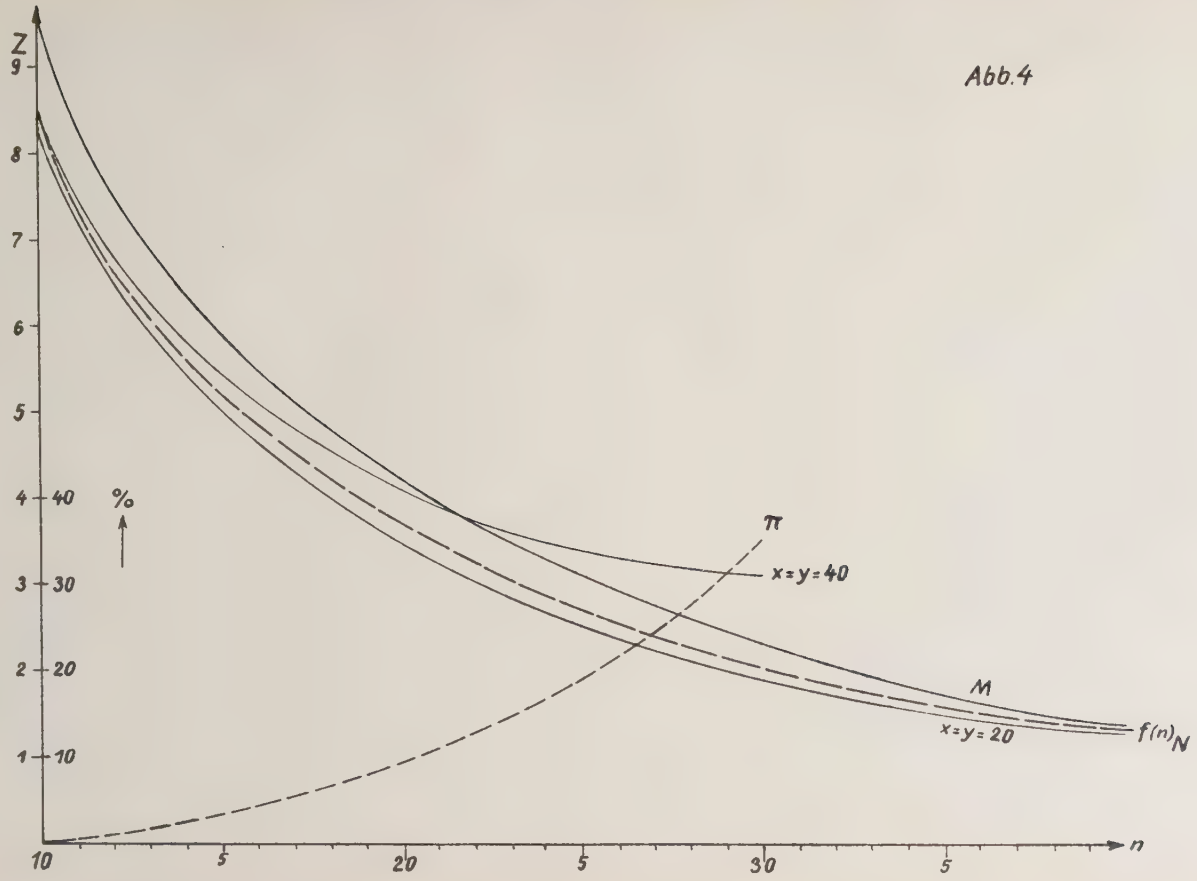
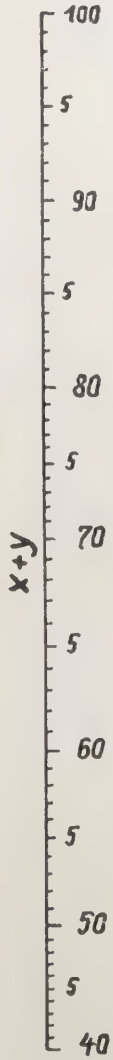
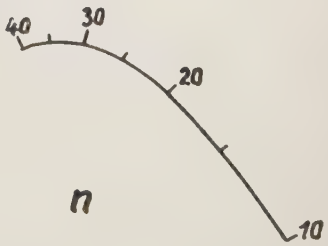


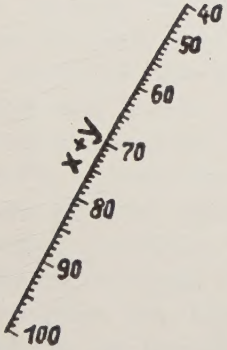
Abb.4

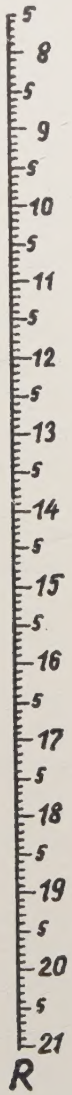






$$R = \int_{0}^{n} \left(e^{-\alpha t - L c^{x}[c^{t}-1]} + e \right.$$





$$Lc^{y}[c^{t}-1] - e^{-Ct-L[c^{x}+c^{y}][c^{t}-1]} \Big) dt$$

Lebenslauf.

Am 9. März 1910 wurde ich, Heinz Hermann Voigt, in Heiligenbeil in Ostpreußen als Sohn des Postmeisters Alfred Voigt geboren. Von 1916 bis 1919 besuchte ich die Volksschule in Sulza in Thüringen. Nach der Versetzung meines Vaters nach Potsdam besuchte ich dort die Oberrealschule und ging nach Ablegung der Reifeprüfung 1931 auf die Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin. Dort widmete ich mich dem Studium der Mathematik, Physik, Chemie und Versicherungswissenschaften. 1934 bis 1935 unterbrach ich mein Studium und diente in dieser Zeit freiwillig beim Infanterie-Regiment Frankfurt/Oder. Nach der Rückkehr zur Universität begann ich an meiner Dissertation zu arbeiten. Im Mai 1938 habe ich geheiratet.

Meinen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Dr. Rose sowie dem Referenten meiner Arbeit, Herrn Professor Dr. Riebesell für ihr freundliches Interesse an der Arbeit sowie für die während ihrer Entstehung gegebenen wertvollen Anregungen aussprechen. Ebenfalls gebührt dem Korreferenten meiner Arbeit, Herrn Prof. Dr. Klose, mein Dank.